

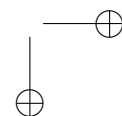
Lugu 2

Algoritman pitky histourii

Nygöi, kolmanden vuosituhannen enzimäzen vuosisuan toizel nelländeksel suammo kuulta paginua, kus “algoritmu” tarkoittau “muanitustu”, “petostu” libo “varrastandua”. Yhtelläh sana “algoritmu” otettih käyttöh jo 1200 vuotta tuaksepäi da algoritmoi on käytetty kai histourielline aigu da ennegi. Algoritmi tarkoittau ohjehii mintah tohtorin tehtävän suorittamizeh, vastavuksen suandah libo tuloksien tuottamizeh. Ezimerkikse kivikavven mužikal kesti kodvan aigua kehittä algoritmu kivikirvehen luajindah. Pidi opastuo löydämäh hyvä kivi, opastuo hivomah da kiinittämäh varzi. Eigo abinoin nero murdua oriehan kuori pergamal kive ole algoritmu. Varoilinnutgi ollah opastuttu luadimah puikko, kudamal kaivua herkuloi puun onnes libo kallivon hallelmukses, algoritmu segi. Kirjutettuo tieduo čotaičendualgoritmois on monen nellän tuhannen vuvven aijal Babylonies da sen jälgeh Grecies, Egiptas, Indies, Kitais, Amerikasgi da kus vai on eläjiä, ollougo tiedo siirdynyh libo roinnuh toizis rippumattah.

2.1 Babylounii (3000–500 eaa)

Ongo kummu, kui äijy Babylonien tiedäjät oldih iel toizii matematiekas? Mesopotamies, “virdoinvälis” oli bohattujii linnoi, kuduat vuorotellen nostih valdah suurembalgi alovehel. Suves oldih Akkadien da Sumerien valdivot, keskel Babylounii, pohjazes Assyyrii, da vie loitombannu pohjazes, Anatoulies, Heettilöin mua. Nenga 3000 eaa, libo aijembigi, sumerilazet piirrettih savitaulule kirjanpidomerkindöi, se jo vihjai kirjutusmaltoh. Linnuvaldivot vuorotellen vägevyttih. Akkadien valdu v. 2334 eaa yletti Persien lahtes Välimereh suate. Ga ezmäzele vuosituhann-



dele eaa tulles Mesopotamii rubei heikkenemäh – sentähgo ku viljelymua väzyi, ilmasto muuttui vai mintäh. Persien koroli Kyyros miehitti Babylonien 539 eaa, Makedounien Aleksander 333 eaa.

2000-luvun eaa algupuolisko oli Sumerilas-Akkadilas-Babylonilazen kultuurin hegemonien aigua. Hyö maltettih kirjuttua da astronoumies da matematiekas hyö oldih tuhat vuotta iel toizii. Nämäs maltois oli hyödy muaruadoloin ajoitukses da kastelukanualoin suunnittelus. Heijän lugesistiemu oli meijän kymmensistiemän jyttyine, päči heijän sistiemas kandu oli 60, ei 10. Musto heijän sistiemas eläy vie meijängi čuasulois; minuuttu on 60 sekundua, čuassu 60 minuuttua.



Kuva 2.1: Mesopotamien kul'tuurat [15].

Nellikönjuuren čotaiččemine ei ole jogahizen taido, eigo nellituhattu vuotta tagaperin olluh laskindu. Ga oli algortimu. Verbualizesti se menöy nenga [13]:

1. Olgah juurrettavu L da juurikandiduattu J . ($J \neq L$, ezim. $L/2$).
2. Laske keskiarvo lugulois J da L/J . Olgah se uuzi J
3. Ku J muutui äijän, siirry rivile 2. Ku ei, lope.

Ezimerki. Čotaiče luvun 2 nellikönjuuri.

$$L = 2, J = 1.5 \Rightarrow J = (1.5 + (2/1.5))/2 = 1.41667 \Rightarrow J = 1.41421 \Rightarrow \dots$$

Kirjutammo algoritman Python ohjelmakse:

```
#!/usr/bin/python
import sys
L=float(sys.argv[1])
J=L/2.0; K=J+1
while abs(K-J)>0.000001:
    K=J
    J=(K+(L/J))/2.0
print J
```

Mondugo kierrostu tarvitah čotaiččemah $\sqrt{13}$ miljoinasvuitin tarkuol?

```
./sqrt 13
4.25
3.65441176471
3.60587791455
3.60555129026
3.60555127546
```

Ei mondu!

A kuibo hyö voidih keksie rivin 2 siändö?. Piättely menöy täh tabah [16]:

Oletammo, ku meijän pidäs eččie luvun S nellikönjuuri da meil on jo arbavus x . Kohendamal arbavustu luvul e pidäs olla

$$\begin{aligned}(x + e)^2 &= x^2 + 2ex + e^2 = S \Rightarrow \\ e &= \frac{S-x^2}{2x+e} \approx \frac{S-x^2}{2x} \Rightarrow \\ x + e &= \frac{S+x^2}{2x} = \frac{1}{2}\left(\frac{S}{x} + x\right) = \text{uuzi } x\end{aligned}$$

Nengahäi iel kohendimmogi juurikandiduattua da hyvin meni.

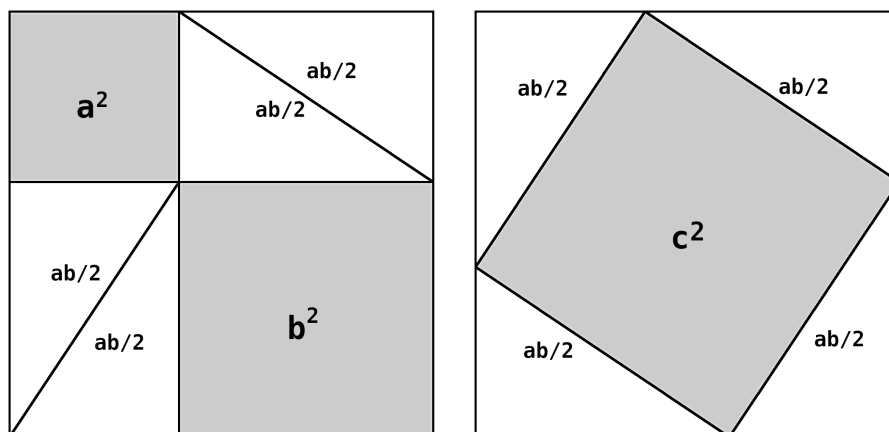
2.2 Pythagoras (570-495 eaa)

Suuri grecielaine filosofu, astronomu da matematikku jälgimäzel vuozituhandel eaa oli **Samoksen Pythagoras** (570–495 eaa) [14]. Filosofies häi oli enzimäine, kudai nimitti iččiedäh “viizahuon ystäväks” ts. filosofakse. Astronoumies häi ellendi, ku mua on miäččy da tiedi, ku huondestiähti da ehtytiähti ollah sama Venus. Matematiekas nygöigi

školniekat tundietah Pythagoruan teoreman suorakulmazen kolmikon hypotenuzan da jalgoin nellikkölöis:

Pythagoruan teorema. *Suorukulmazes kolmikos hypotenuzan nellikkö on jalgoin nellikkölöin summu.*

Tovestus. Kačo kuvua, “katalyzuatorannu” nelli $ab/2$ kolmikkuo.



2.3 Eukleides (300 ± 30 eaa)

Enzimäine *algoritmu*, kudamas škol'niekku libo matematiekan opastui kuulou, on tovennägözesti *Eukleidien algoritmu*, kudamanke voi čotaija luonnollizien¹ luguloin *suuriman yhtehizen jagajan*. **Aleksandrien Eukleides** (~ 330– 270 eaa) [5] oli grecieläine matematikku. Sanalizesti: Vähennä suurembas pienembi, kuni yhtäsuuret.

Eukleidien algoritmu

```
function syj( $m, n$ )
  while  $m \neq n$ 
    if  $m > n$ :  $m = m - n$ 
    else  $n = n - m$ 
  return  $m$ 
```

¹0,1,2,3,... ollah *luonnollizet* luvut da ...-2,-1,0,1,2,...ollah *ynnällizet* luvut

Ezimerkikse luguloin 18 da 12 syj:

$$\text{syj}(18,12)=\text{syj}(6,12)=\text{syj}(6,6)=6.$$

Algoritman vuoh sežo voi čotaija kahten luvun m da n *pienimän yhte-hizen monikerran* $\text{pym}(m,n)$:

$$\text{pym}(m,n)=(m \times n)/\text{syj}(m,n)$$

Ezimerkikse

$$\text{pym}(18,12) = (18 \times 12)/\text{syj}(18,12) = 216/6 = 36.$$

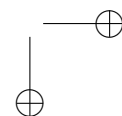
Hos Eukleidien roindu- da kuolenduvuoze ei tietä, häi jätti suuren jallanjällen tiijollizen tiijon histourieh. 13-ozahizeh kirjusarjah *Algehet* (grechiekse *Stoikheia*, latinakse *Elementa*) häi keräi omii da toizien mate-muattizie maltoloi. Antiekkuaijan lopul kirjat kiännettih latinakse, kes-kiaijal enne vuotta 1000 arabiekse da jeyreikse da sen jälgeh euoppalazile kielile. Kirjupainon keksindän jälgeh sit luajittih ei vähembi tuhattu pai-nostu da käytettih školakirjoinnu 1900-luvule suate.

Kuuzi enzymästy kirjua käzitelläh tazogeometrijuu, Pythagoraksen teoremu löydyi enzymäzes. Kirjois seiččemenendes kymmenendeh tiemannu on luguteorii, Eukleidien algoritmu on kirjas seiččemen. Yheksändes häi tovestau, ku alguluguloi (jaottomii luguloi) on eäretöi lugumiäry. Kym-menendes keksitäh irracionualizet luvut, kudamii ei voi ezittiä ynnällizien luguloin ozamiärinny. Yhtestostu edehpäi kirjois tiemannu on monidi-mensionualine geometrii.

Nygyaijas kaččojen on interesnoi huomata, ku Eukleidos luvettelou oletukset (aksiomat) kudamispäi konstruktiivizil piätöksil johtetah tu-lokset. Tämä on kui juohatus David Hilbertan huaveheh [11], kudaman tavoittehennu oli mehanizuija matematiekku, johtua kai teoriemat so-veldamal piättelysiändölöi aksiomoih. Tämä huaveh ozutettih mahtotto-makse [9].

2.4 Diofantos (200–284 jaa)

Diofantoksen yhtälölöih emmo syvembäldi puutu täs kirjas, a net lii-tytäh syj da pym algoritmoih da čotaittavuon teorieh. Nimenandai **Aleksandrian Diofantos** (200–284 jaa) oli matematikku, kudaman ruadoh viegi puaksuh vihjatah, a Diofantoksen yhtälölöi opittih reššie jo Pythagoruan aigah. *Diofantoksen yhtälö* [4] on muoduo $p_1 = p_2$, mis p_1 da p_2 ollah *polinoumiloi* libo *termilöin* summii, da termit ollah muoduo ynnälline lugu kerdua muuttujan potensu.



Lineaarine Diofantoksen yhtälö, muoduo $ax + by = c$ reššivyy aiga helposti syj:n vuoh. Pythagoruan kolmikkoh liittyjäl yhtälöl $x^2 + y^2 = z^2$ on eärettömän mondu vastavustu (rešeniedy), suorukulmastu kolmikkuo. A kaikil yhtälölöil ei ole rešeniedy. Hätken duumaittih, ku yhtälöl $x^4 + y^4 + z^4 = u^4$ ei ole rešeniedy, kuni tiedokonehel moine lövvettih: $95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4$.

Nygyaijannu v.1970 piiteriläine Juri Matijaševic tovesti [12], ku ei ole mahtollistu luadie algoritmie, kudamal vois reššie kai Diofantoksen yhtälöt, ei nygöi eigo nikonzu. Täh pädöy kopiruija anekdottu kahtes kuulužas luguteoretikos, G.H. Hardys da S. Ramanujanas [10]. Ramanujan voimatui, Hardy ajoi taksil händy tervehtimäh, pertih tulduu häi sanoi: *Tulin taksil noumer 1729, aiga mielenkiinnotoi noumer*. Ramanujan kerras plakkai: *Ei Hardy, sehäi on ylen interesnoi noumer – se on pienin lugu, kudaman voi ezittiä kahtel taval kahten kuubikan tulonnu!* ($9^3 + 10^3$ da $12^3 + 1^3$)

2.5 Brahmagupta (598-688 jaa) Indii

Kitais da Indiesgi maltettih matematiekkua da erähis kohtis oldih ielgi toizii, nimenomah desimalizes noumersistiemas. Lugusistiemu vastai nygösty, hos noumerat oldih erinägözet da allukse 0:l ei olluh omua glyyfi se ozuttih čökkehel libo loukol. Luguloi voidih kirjuttua oigiel hurahpäigi. Enzimäzii desimalusistieman da 0:n käyttäjii oli indieläine astronoum-matematikku Brahmagupta 600-luvul. Häi oli toinah enzimäine, kudai rešši toizen astien yhtälön mejän jyttyöh, hos ei mejän merkindytavoin. Yhtälön $ax^2 + bx = c$ tuloksen häi ezitti täh tabah:

Vähennä keskimäine lugu (b) nellikönjuures, kus on nellinkerdaine tulo ezmäzes (a) da jälгимäzes luvus (c), lizätty keskimäzen luvun (b) nelliköl, da juattu kai tämä kaksinkerdazel enzimäzel luvul (a). Tulos on tundematoi (x).

(Hänen teksas ei olluh kerdoimii a , b , c salbavomerkilöis.)

Myöhäi kirjuttazimmo, ku yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ vastavus on

$$x = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}$$

Tämä oli vaiku yksi ezimerki hänen ahkeran tutkijan ruavos [2].

2.6 Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780–850 jaa)

On yksi syy ezitellä täs kirjas al-Khwarizmi – hänespäi **algoritmu** sai nimen. Nimes “al” vastuu elatiivu-sijua. Hänen kodirandu, Khwarazman linnu, on nenga 600 km Kaspiesenmeres päivännouzu, lähäl Amu Darja -jogie. Sih aigah kieli kodilinnas onnuako oli iran sugukieli da uskondo zarathustralaine. Nygöi linnan nimi on Khiva da se kuuluu Uzbekistanah. Poštumarku al-Khwarizmas jullattih v.1983, konzu Uzbekistan kuului Nevvostoliittoh.



Kuva 2.2: 6.9.1983

Ei ole tieduo, kus al-Khwarizmi eli da opastui nuorusvuvvet. Islamilazes maailmas v. 750 valdah noussuh Abbasidin kalifuattu perusti Bagdadan linnan v. 862 da vuosisuan lopul *Viizahuon taloin*. Sinne kučuttih parahii tiedäjii. Toinah kodirannal Muhammadua nevvottih: “Go west, young man!”. Häi muutti Bagdadah, 1700 km lounahah, Viizahuon taloh, kus häi ruadoigi parahat vuvvet 813-833. Sie häi omaksui islaman uskon da kirjutti omat tutkimukset arabikse.

Kui pädevy tiedomies al-Kharizmi oli, mielet jyrkästi vaihtellah, kč. ezim. [8, 17]. Ken nimidä ei rua, händy ei mainita, ken äijy ruadau, händy kiitetäh da čakatah. Häi oli ahker.

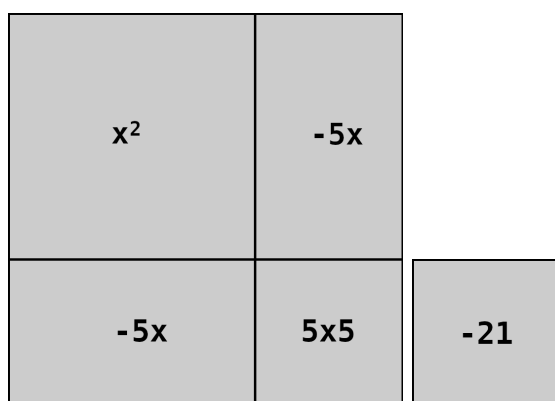
Midäbo al-Khwarizmi ruadoi? Häi äijän tiedi Persien, Indien, Babylonien da Grecien kul’tuuroin suavutuksii astronomies, geogruafies da matematiekas, da kehitti da välitti nengomua tieduo edehpäi.

Sih aigah ei olluh tarkua da kompaktua matematiekan kieldy, kudamua nygöi školaopastuksesgi käytetäh. Eigo ni desimualine notacii olluh standardu luguloin kirjuttamizeh. Sentäh algoritmatgi oldih sellityksii, kudamis oli pahoiellendyksen varavuo. Näyttehekse al-Khwarizmin algoritmois otammo hänen algoritman $x^2 + ax = b$ muodozen toizen astien yhtälön reššindäh.

Algoritmu. Rešši yhtälö $x^2 + ax = b$, kus a da b ynnällizii luguloi.

1. Piirrä $x \times x$ nelliikkö (x on tundematoi lugu). Nellikön sydämehe kirjuta x^2 .
2. Piirrä nellikön oigiele puolele x :n korguine kaidaine suorukulmikko. Suorukulmikon sydämehe kirjuta $ax/2$ (yhtälön a)
3. Piirrä nellikön alapuolele x :n levyine kaidaine suorukulmikko. Suorukulmikon sydämehe kirjuta $ax/2$ (yhtälön a)
4. Oigiehe alačuppuh kirjuta lugu $a/2 \times a/2$.
5. Kirjuta bumuagale yhtälö muvvos $(x + a/2)^2 = b + (a/2)^2$
6. Opi löydiä luvun $b + (a/2)^2$ (ligimiäräine) nellikönjuuri, ts. lugu c kudamale $c^2 \approx b + (a/2)^2$
7. Yhtälön (ligimiäräine) rešeenii on $c - a$

Ezimerki Rešši yhtälö $x^2 - 10x = -21$. Piirrämmö ezmäi x^2 nellikön. Kaidazien nellikulmikkoloin sydämehe kirjutetah $(-\frac{10}{2} = -5x$. Oigien alačupun nelliikköh pidäy kirjuttua $(-5 \times -5 = 25$ da suuren juaššiekan oigiele puolele pieni juaššiekku luvunke -21 . ližätä yhtälön oigiele puolele 25.



Kuva 2.3: Yhtälön reššindy “tävvendämäl” [3]

Nenga yhtälö suau muvvon $(x - 5)^2 = -21 + 25 = 4$. Ku $4 = (\pm 2)^2$. Ottamal nellikönjuuren mollembis puolis, suammo $x - 5 = \pm 2$. Nenga yhtälöl on rešeeniet $5 + 2 = 7$ da $5 - 2 = 3$. $x = 5 + 2 = 7$ libo $x = 5 - 2 = 3$.

Bibliography

- [1] *Babylonia* <https://en.wikipedia.org/wiki/Babylonia>
- [2] *Brahmagupta*. <https://en.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta>
- [3] *Al-Khwarizmi's Completing the Square Activity* https://bulldog2.redlands.edu/fac/beery/math115/m115_activ_complsq.htm
- [4] *Diophantine equation* https://en.wikipedia.org/wiki/Diophantine_equation
- [5] *Euclid - Wikipedia* <https://en.wikipedia.org/wiki/Euclid>
- [6] *Euclidean algorithm - Wikipedia* https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_algorithm
- [7] *Euclid's Elements* https://en.wikipedia.org/wiki/Euclid's_Elements
- [8] Michael Gorodin.
<https://davidson.org.il/read-experience/en/sciencehistory-en/genius-who-invented-algebra-and-algorithm/>
- [9] Kurt Gödel. *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I*, in Solomon Feferman, ed., 1986. Kurt Gödel Collected works, Vol. I. Oxford University Press, pp. 144–195. 1931.
- [10] G.H. Hardy.
Matemaatikon apologia. Terra Cognita, 1997. *Alguperäine: A Mathematician's apology*. Cambridge University Press, 1940.
- [11] *Hilbert's program* https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_program
- [12] Yu. Matiyasevich. *Hilbert's Tenth Problem*. MIT Press 1993.
- [13] *Ancient methods of calculating square roots* <https://multiplecalculator.com/ancient-methods-of-calculating-square-roots.html>
- [14] *Pythagoras* <https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagoras>

- [15] Sarva – Gustafson – Södergård. *Historiallinen koulukartasto*. WSOY 1961.
- [16] *Square root algorithms*. https://en.wikipedia.org/wiki/square_root_algorithms
- [17] *al-Khwarizmi didn't in any way originate invent or create the algorithm* <https://thonyc.wordpress.com/2026/05/06/al-khwarizmi-didnt-in-any-way-originate-invent-or-create-the-algorithm/>

